Mr. Jasmina Rahmanović
JU Behram-begova medresa u Tuzli
jasmina.rahmanovic@bbm.edu.ba

STABILNOST NEHIPERBOLIČKOG EKVILIBRIJUMA U DIFERENTNIM JEDNADŽBAMA I DISKRETNIM DINAMIČKIM SISTEMIMA

DOI: 10.58584/2490-3752.2025.11.11.111
UDC/UDK: 517.9

SAŽETAK

Za razliku od hiperboličkih tačaka ekvilibrijuma, gdje je lokalna stabilnost obuhvaćena kroz nekoliko teorema i gdje uvijek imamo jasnu situaciju, ispitivanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma u diferntnim jednadžbama i diskretnim dinamičkim sistemima je specifično i zahtijeva dodatna ispitivanja i upotrebu različitih tehnika i metoda. Ovaj rad posvećuje pažnju upravo nehiperboličkom ekvilibrijumu kod diferentnih jednadžbi drugog reda te jednodimezionalnih i dvodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sistema.

Ključne riječi: Ekvilibrijum, nehiperbolički ekvilibrijum, stabilnost, diferentna jednadžba, sistemi diferentnih jednadžbi, Murakamijev teorem, Neimark-Sackerova bifurkacija, KAM teorija, centralna mnogostrukost, Lyapunovljeva funkcija.

1. Uvod

Posljednjih nekoliko decenija izučavanje diferentnih jednadžbi je intenzivirano, a uglavnom je motivirano problemima iz prakse. Naime, veliki broj procesa koji se odvijaju oko nas (iz biologije, fizike, medicine, ekonomije...) može se predstaviti uz pomoć diskretnih modela, to jest diferentnih jednadžbi ili sistema diferentnih jednadžbi. To su procesi koji se najčešće prate u diskretnom vremenu. Također, veliki napredak u razvoju tehnologije, odnosno, odgovarajućih softverskih programa i paketa, olakšao je, a time i ubrzao razvijanje ove oblasti.

Diskretni dinamički sistem (DDS) opisujemo kao autonomni sistem diferentnih jednadžbi

$$x_{n+1}=F(x_n),\ n=0,1,2,\ldots \qquad (1)$$

gdje je $F: R^n \to R^n, (n \in N)$. Rješenje posmatranog sistema (1) je niz $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$, koji zadovoljava dati sistem za svako $n=0,1,2,\ldots$ i ono uključuje konstantu C koja može biti izračunata ako je dat početni uvjet $x_0=\alpha$.

Tačka $\bar{x}$ ekvilibrijuma DDS (1) je rješenje jednadžbe

$$\bar{x}=F(\bar{x}).$$

Dakle, tačka ekvilibrijuma je fiksna tačka preslikavanja F.

Fiksna tačka preslikavanja F_k naziva se periodičnom tačkom perioda k sistema (1). To je, zapravo, rješenje jednadžbe

$$p=F_k(p).$$

Pozitivna orbita tačke x_0 za sistem (1) je skup

$$O^{+¿(\alpha)=\{x_0,F(x_0),F^2(x_0),\ldots\}.¿}$$

Ako je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma DDS (1), tada uvođenjem smjene

$$y_n=x_n-\bar{x} \text{ i } G(y)=F(y+\bar{x})-F(\bar{x}),$$

DDS (1) prelazi u sistem

$$y_{n+1}=G(y_n).$$

Nije teško uočiti da je 0 tačka ekvilibrijuma dobijenog sistema i da ona odgovara tački ekvilibrijuma $\overline{x}$ sistema (1). Dakle, bez smanjenja općenitosti, može se pretpostaviti da je 0 tačka ekvilibrijuma DDS (1).

Veoma je važno u praksi ispitati stabilnost DDS (1), odnosno stabilnost njegove tačke ekvilibrijuma. Ukoliko sve svojstvene vrijednosti Jakobijana $J_F(\overline{x})$ leže unutar jediničnog diska, ekvilibrijum $\overline{x}$ je lokalno asimptotski stabilan, a ukoliko je bar jedna svojstvena vrijednost izvan jediničnog diska, riječ je o nestabilnom ekvilibrijumu.

Postoje različiti pristupi u ispitivanju stabilnosti DDS i to se, uglavnom, može, s manjim ili većim naporom, izvesti u slučaju tzv. hiperboličkog ekvilibrijuma, to jest kada nijedna svojstvena vrijednost Jakobijana $J_F(\overline{x})$ nije po modulu jednaka jedan. Međutim, poseban problem predstavlja ispitivanje stabilnosti tzv. nehiperboličkog ekvilibrijuma, to jest u slučaju kada je barem jedna svojstvena vrijednost Jakobijana $J_F(\overline{x})$ po modulu jednaka jedan. Važno je napomenuti da se tada postupa različito od slučaja do slučaja i da ne postoji poseban metod za to.

U ovom radu u fokusu je, upravo, nehiperbolički ekvilibrijum kod diskretnih dinamičkih sistema oblika (1) koji zahtijeva posebnu pažnju i posebne tehnike i metode za utvrđivanje stabilnosti, odnosno nestabilnosti.

2. Nehiperbolički ekvilibrijum u jednodimenzionalnom slučaju

Kada je riječ o stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma u jednodimenzionalnom slučaju, to jest kada je $F: R \to R$, i ovdje postoje dovoljni uvjeti za utvrđivanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma. Ekvilibrijum je nehiperbolički ako je $|F'(\overline{x})|=1$. Dakle, razmatraju se dva slučaja, i to kada je $F'(\overline{x})=1$ i kada je $F'(\overline{x})=-1$.

U slučaju je $F'(\overline{x})=1$, koristeći Test drugog izvoda, Test trećeg izvoda, odnosno Test izvoda višeg reda, moguće je doći do zaključka o stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma. Ovdje se uvode i pojmovi polustabilnosti odozdo i polustabilnosti odozgo tačke ekvilibrijuma. Test izvoda višeg reda predstavlja opći kriterij za utvrđivanje lokalne asimptotske stabilnosti, polustabilnosti, odnosno, nestabilnosti nehiperboličke tačke ekvilibrijuma .

Nešto složenija situacija je u slučaju kada je $F'(\bar{x}) = -1$, zbog mogućnosti pojave periodičnih rješenja minimalnog perioda dva i zbog činjenice da orbita $O^{+¿}(x_0) = [x_0, F(x_0), F^2(x_0), \ldots]¿$ oscilira oko ekvilibrijuma $\bar{x}$. Zato se ovdje uvodi pojam Schwarzianovog izvoda ili Schwarziana u tački ekvilibrijuma te je, pomoću njega, moguće dobiti dovoljne uvjete za lokalnu asimptotsku stabilnost ili nestabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma. U ovom slučaju tzv. Murakamijev teorem je opći kriterij koji daje odgovor na pitanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma.

U nekim slučajevima moguće je izvesti zaključak o stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma elementarnim putem, odnosno posmatrajući ponašanje rješenja u blizini tačke ekvilibrijuma.

Koristeći Dijagram paukove mreže, moguće je grafički prikazati ponašanje rješenja oko tačke ekvilibrijuma.

3. Nehiperbolički ekvilibrijum u dvodimenzionalnom slučaju

U slučaju dvodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sistema (to jest kada je $F: R^2 \to R^2$ u DDS (1)) ili u slučaju diferentne jednadžbe drugog reda

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), n = 0, 1, 2, \ldots, \quad (2)$$

ispitivanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma postaje vrlo ozbiljan problem.

Naime, Teorem linearizirane stabilnosti daje odgovor kada je riječ o stabilnosti hiperboličkog ekvilibrijuma, ali stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma ostaje otvorena.

Ipak, u nekim slučajevima postoje metodi pomoću kojih se može utvrditi njegova stabilnost. Metod Lyapunovljeve funkcije jedan je od načina za utvrđivanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma. Ovaj metod se može koristiti i za višedimenzionalne sisteme. Prvo se uvodi pojam Lyapunovljeve funkcije, a onda, ako su ispunjeni uvjeti Lyapunoljevog teorema stabilnosti, može se utvrditi stabilnost, lokalna asimptotska stabilnost, odnosno globalna asimptotska stabilnost tačke ekvilibrijuma.

Jedan od metoda pomoću kojeg se mogu izvesti zaključci o stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma je i metod invarijante. Naime, ukoliko DDS (1) ili jednadžba (2) posjeduju invarijantu, tada se, uz pomoć Lyapunovljeve funkcije, pod određenim uvjetima, koriteći tzv. Diskretni Dirichletov teorem, može odrediti priroda stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma. Isti se metod može koristiti i u trodimenzinalnom slučaju DDS (1) ili u slučaju diferentne jednadžbe trećeg reda

$$x_{n+1}=f\left(x_n,x_{n-1},x_{n-2}\right),n=0,1,2,\ldots, \qquad (3)$$

Primjena ovog metoda može pokazati na ispitavanju stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma Lynessove diferentne jednadžbe

$$x_{n+1}=\frac{a+x_n}{x_{n-1}},n=0,1,2,\ldots,$$

gdje je $a>0$ parametar.

Metod invarijante se može ilustrovati na ispitivanju stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma za Toodovu diferentnu jednadžbu trećeg reda

$$x_{n+1}=\frac{a+x_n+x_{n-1}}{x_{n-2}},n=0,1,2,\ldots.,$$

pri čemu je $a>0$.

Metod invarijantne nije previše složen za primjenu, ali je ponekad jako teško pronaći invarijantu, iako je njena egzistencija obezbijeđena teoremom, kada je riječ o nehiperboličkom ekvilibrijumu linearnih diskretnih dinamičkih sistema.

Navedena dva metoda, metod Lyapunovljeve funkcije i metod invarijante, mogu se koristiti i za ispitivanje stabilnosti hiperboličkog ekvilibrijuma.

U dvodimenzionalnom slučaju DDS (1), kao i u slučaju diferentne jednadžbe (2), moguće je koristiti tzv. Teorem centralne mnogustrukosti, kako bi se došlo do spoznaje o prirodi stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma, mada je taj metod vrlo kompleksan. Centralna mnogostrukost je, najjednostavnije rečeno, skup M_c u prostoru manje dimenzije, gdje se o stabilnosti polaznog sistema može zaključivati promatrajući ponašanje na skupu M_c. S obzirom na to da je stabilnost jako dobro razrađena u jednodimenzionalnom slučaju, ovaj metod predstavlja vrlo moćno sredstvo za ispitivanje stabilnosti u dvodimenzionalnom slučaju. Ovaj metod se može primijeniti na ispitivanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma u dva slučaja, i to:

- Jedna svojstvena vrijednost matrice Jakobijana J_F je 1, a druga je unutar jedinične kružnice.
- Jedna svojstvena vrijednost matrice Jakobijana J_F je -1, a druga je unutar jedinične kružnice.

Primjena metoda centralne mnogostrukosti može se pokazati na primjeru diferentne jednadžbe drugog reda

$$x_{n+1}=\frac{A x_n^2+E x_{n-1}}{x_n^2+f}, n=0,1,2,\ldots,$$

pri čemu je $A, e, f \in (0, \infty)$.

Ponekad je moguće ispitivati stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma u dvodimenzionalnom DDS (1) ili diferentnoj jednadžbi drugog reda (2) u najtežem slučaju, kada su obje svojstvene vrijednosti Jakobijana $J_F(\bar{x})$, odnosno $J_f(\bar{x})$, konjugovano-kompleksni brojevi po modulu jednaki jedan. To je tzv. eliptički slučaj.

Ukoliko preslikavanja F ili f imaju osobinu da čuvaju površinu (tzv. area preserving map), tada se koristi tzv. KAM (Kolmogorov-Andre-Moser) teorija. Preslikavanje F je preslikavanje koje čuva površinu ako za njegovu Jakobijevu matrice $J_F(x)$ vrijedi

$$det\, J_F(x)=1,$$

za sve $x \in R^2$. Glavni rezultat koji se primjenjuje ovdje je tzv. KAM teorem na osnovu kojeg se utvrđuje stabilnost nula ekvilibrijuma, tako što se, pomoću tri odgovarajuće transformacije koordinata, sistem dovede u tzv. Birkhofov normalni oblik.

KAM metod se može uspješno primijeniti na diferentnu jednadžbu drugog reda

$$x_{n+1}=\frac{A x_n^3+B}{a x_{n-1}}, n=0,1,2,\ldots,$$

pri čemu su A,B,a parametri i $A,B,a>0.$

S druge strane, ukoliko preslikavanja ne čuvaju površinu, ali zadovoljavaju određene dodatne uvjete o egzistenciji tzv. Neimark-Sackerove bifurkacije, moguće je zaključiti da je nehiperbolički ekvilibrijum stabilan, ali ne i asimptotski. Dakle, Neimark-Sackerova bifurkacija se pojavljuje u diskretnim dinamičkim sistemima koji zavise o parametru, s fiksnom tačkom čiji Jakobijan ima nekoliko konjugovano-kompleksnih svojstvenih vrijednosti koje su, po modulu, jednake jedan. Najjednostavnije rečeno, bifurkacija se javlja kada mala promjena vrijednosti parametra izaziva iznenadne kvalitativne ili topološke promjene ponašanja sistema. Naziv "bifurkacija" prvi je uveo Henri Poincare 1885. Lokalne bifurkacije koje mogu biti u potpunosti analizirane posmatrajući lokalnu stabilnost ekvilibrijuma, periodičnih tačaka ili invarijantnih skupova, kada parametar prolazi kroz kritičnu vrijednost, javljaju se u nehiperboličkim tačkama. Neimark-Sackerova bifurkacija je diskretni analogon Hopfove bifurkacije. Razlikujemo Neimark-Sackerovu superkritičnu i subkritičnu bifurkaciju. U prvom slučaju, fiksna tačka je stabilna za vrijednost bifurkacionog patrametra manju od Lyapunovljevog koeficijenta λ_o (koji se dobije u procesu prelaska na normalnu formu), a nestabilna za vrijednost parametra veću od λ_o. Fiksna tačka je za neku malu pozitivnu vrijednost parametra okružena izoliranom zatvorenom invarijantnom krivom koja je jedinstvena i stabilna. Sve orbite koje startaju izvana ili iznutra u odnosu na zatvorenu krivu, ali ne u koordinatnom početku, teže ka krivoj pod određenim iteracijama. U drugom slučaju, nestabilna zatvorena kriva postoji za vrijednost parametra manju od Lyapunovljevog koeficijenta λ_o. Struktura orbita na invarijantnom krugu zavisi od činjenice da li je količnik između ugla rotacije i 2π racionalan ili iracionalan. Ako je racionalan, orbite na invarijantnoj krivoj su periodične, a ako je iracionalan, orbite na krugu su guste.

Primjena ovog metoda može se vidjeti na primjeru jedne homogene racionalne diferentne jednadžbe drugog reda s kvadratnim članovima

$$x_{n+1}=\frac{A x_n^2+B x_n x_{n-1}+C x_{n-1}^2}{a x_n^2+b x_n x_{n-1}+c x_{n-1}^2}, n=0,1,2,\ldots,$$

pri čemu su A, B, C, a, b, c pozitivni parametri.

U korištenju KAM metoda ili u slučaju Neimark-Sackerove bifurkacije, neophodno je dobiti odgovarajuću (Birkhffovu) normalnu formu

$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} O_l \\ O_l \end{pmatrix},$$

odakle onda proizilaze naredni koraci u ispitivanju.

Naravno, praksa pokazuje da se ispitivanje prirode stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma u dvodimenzionalnom DDS (1) ili diferentnoj jednadžbi drugog reda (2) može izvoditi i na neki poseban način, specifičan za svaki slučaj pojedinačno.

Tako se, recimo, u slučaju kada je preslikavanje *F* kooperativno ili kompetitivno, to jest kada je preslikavanje *F* takvo da je rastuće po obje varijable ili je neopadajuće po prvoj, a nerastuće po drugoj varijabli, mogu koristiti metodi teorije nizova u parcijalno uređenom skupu R^2. U metodu monotonih preslikavanja koristi se tzv. jugoistočno (se) parcijalno uređenje na R^2, defnirano sa $(x_1, y_1) \preceq_{se} (x_2, y_2)$ ako je $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \geq y_2$. Slično, sjeveroistočno (ne) parcijalno uređenje na R^2 definiše se sa $(x_1, y_1) \preceq_{ne} (x_2, y_2)$ ako je $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \leq y_2$.

Metod monotonih preslikavanja može se vidjeti primjenom na diferntnu jednadžbu

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{a x_n^2+e x_{n-1}+f}, n=0,1,2,\ldots,$$

gdje su parametri a, e, f pozitivni brojevi i $a+e+f>0$.

O metodu centralne mnogostrukosti, KAM teoriji i Neimark-Sakerovoj bifurkaciji pisali su M. Kulenović, O. Merino, G. Ladas, S. Elaydi, M. Nurkanovć, Z. Nurkanović i dr., dok se o metodu monotonih preslikavanja može naći u radovima M. Kulenovića, M. Nurkanovića, Z. Nurkanović, M. Garić- Demirović , S. Moranjkić, S. Hrustić i dr.

Literatura

S. Elaydi, An Introduction to Di_erence Equations - Third Edition, Springer, New York, 2005.

S. Jašarević Hrustić, M.R.S. Kulenović, Z. Nurkanović and E. Pilav, Birkhoff normal forms, KAM theory and symmetries for certain second order rational difference equation with quadratic term, Int. J. Difference Equ., 10 (20159, 181-199).

M.R.S. Kulenović and O. Merino, Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica, Chapman&HALL/CRC, Boca Raton-London, 2002.

M.R.S. Kulenović, S. Moranjkić, M. Nurkanović and Z. Nurkanović, Global Asymptotic Stability and Neimark-Sacker Bifurcation of Certain Mix monotone Difference Equation, Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol. 2018. Article ID 7052935, 22 pages.

M.R.S. Kulenović, M. Nurkanović and Z. Nurkanović, Global dynamics of certain mix monotone difference equation via center manifold theory and theory of monotone maps, Sarajevo Journal of Mathematics, Vol. 15 (28), No. 23, (2019),129-154.

M. Nurkanović, Diferentne jednadžbe - teorija i primjene, Denfas, Tuzla, 2018.

M. Nurkanović, Diskretni dinamički sistemi, Skripta, PMF, Tuzla, 2022.

M. Nurkanović and Z. Nurkanović, Birkhoff normal forms, KAM theory, periodicity and symmetries for certain rational di_erence equation with cubic terms, Sarajevo Journal of Mathematics, Vol. 12 (25), No. 2, (2016), 217-231